مجلة جامعة ذمار للعلوم الطبيعية والتطبيقية
15 -27 (5)B 2012
ISSN: 2073-0764

تمهيد بيز لنموذج خطي حركي ـ نموذج التدرج

سلطان علي محمد سالم

قسم الرياضيات ـ كلية التربية - جامعة الحديدة ـ اليمن

ملخـص

التـمـهيـد (smoothing)نـوع مـن حـالات الـتـقـديـر لـمعـلـمـة أو مـتـغـيـر الحالـة(state variable,) ، ويـطـلـق عـلـيـه أيضـا (Data _ smoothing) . ففي هذا البحث تم الاهتمام بتمهيد بيز (Bayesian Smoothing) لـنـمـوذج حـركـي خطـي هو نموذج التـدرج ، و استخدام أسلوب بيز في التمهيد يعني إعادة النظر في التقدير ألترشيحي(Filtering Estimation) فـي ضـوء بيانات جديدة وذلك لتحسين التقدير (Enhancement) وتقليل نسبة الخطـأ . وتوظيـف أي بيـانـات جديـدة فـي عـمـلـيـة الـتـقدير هو نـوع من الترشيح العكسي ((Back ward filtering للحصول علـى تقدير أدق لمعلمات الـنـموذج(مـتـغـيـر الحالـة) . وقمـنـا فـي هـذا الـبحث بـإبراز المحتوى الرياضي بصورة واضحة تمكن القارئ من التطبيق العملي حال توافر بيانات حقيقيـة .

1 مفهوم التمهيد : Meaning of Smoothing

أن الـتـمـهـيـد يـقـصـد بـة الـتـنـعيم أو الصقل أو التعديل الذي يجري علـى القيم ذات التعرجـات الناتجة من التشويش الموجود أو المتبقي فـيـهـا ، و هو نـوع من عملية التقـدير ، ويعتبـر التمهيد إحـدى الحـالات المهمـة فـي مجـال الاستدلال الإحصـائي وكـذلـك فـي مـجـالات مـتـعـددة في العلوم الأخرى منها هـنـدسـة الاتـصـالات ، حيـث بـرز دورها في عمليـة المعالجة أو التدقيق من خلال دراسة الظواهر التي تتغير مع الزمن وذلك باستعادة الماضي .

فـي هـذا البحـث نـقوم بدراسة التمهيد من خلال تقدير المعلمة أو إعادة التقدير في ضـوء تـوافر بيانـات جديـدة ، وهـذا يعنـي أن التمهيـد نـوع مـن الترشـيح العكسـي (Backward Filtering) لـتوصـلـنـا إلى تـقـديـر أدق . وهـنـاك ثـلاث تـقـديـرات وردت في أدبيات الاستدلال حول الحالة أو المعلمة التي تكون غير معلومة حيث بينها لأول مرة الـباحث (kalman ,1960) وسميت بقيم التقديرات ل θ_s وهـي الترشيح والتنبؤ والتمهيد معتمدا علـى البيانات المعطاة لغاية الزمنt .

وعـنـد افـتـراض أن هناك معلمات مـهـمـة بالنسبة لنـا و الـتـي لا نعرف قيمتها بشكل تـام ، نأخذ بيانـات للحالـة تحت الدراسة و بواسطتها نقدر المعلمات المهمة الـمطلوبة ، إلا أن هذه الـمشاهدات تكون مشوبة (غير خالية) من الخطأ . وفيما

يتعلق بالمعلمة غير المعلومة θ_s نستدل عليها من المشاهدات : ($y_1, y_1, \_..., y_t$) ، فإذا كانت :

1) s = t فالحالة تعرف بالترشيح (filtering) وفيه يكون الهدف إيجاد :

$$p(\theta_t \setminus y_1, y_2, \_..., y_t)$$

2) s > t فالحالة تعرف بالتنبؤ (prediction) وفيه يكون الهدف إيجاد :

$$p(\theta_{t+h} \setminus y_1, y_2, \_..., y_t) \text{، } h = 1,2,\ldots$$

3) s < t تعرف الحالة بالتسوية (التمهيد)(Smoothing) وهي عملية تقدير المعلمة θ_{t-h} وذلك بتوظيف المشاهدات الجديدة في إعادة النظر بالتقدير ألترشيحي ويعبر عنه كميا بإيجاد التوزيع الاحتمالي اللاحق : h=1,2,…t-1 ، $p(\theta_{t-h} \setminus y_1, y_2, \_..., y_t)$ وهذه الحالة سوف نبني دراستنا عليها ، وفي هذا البحث سوف نستخدم أسلوب بيز مع نموذج حركي خطي (Dynamic linear model) هو نموذج التدرج المقدم من قبل (Harrison and Stevens , 1971 , 1976) و (Harrison and west , 1997) ، بالإضافة إلى الأبحاث التي استخدمت هذا النموذج ومن هذه الأبحاث البحث الذي قدمه (Gamerman and Migon , 1993) والذي تطرق فيه إلى حالة التمهيد مع النماذج الحركية الخطية، وكذلك البحث الذي قدمه (West 1995) معتمدا فيه على هذه النماذج ودراسة التنبؤ .

وسوف تكون انطلاقتنا في هذا البحث من حساب مرشح كالمن (Kalman Filter) رياضيا والذي يكون حالة أساسية (أولية) لعملية التمهيد، ولكي نتوصل إلى علاقة تعاقبية (Recursive Relation) في تمهيد بيز ، سوف نعتمد على قاعدة السلسلة (Chain rule) المبينة من قبل (Talib,s 1999) وبالاعتماد على نظرية بيز والتحليل المتسلسل وفق الخاصية الماركوفية (Markovian property) لتكون مفتاحا أساسيا يوصلنا إلى الهدف المطلوب ضمن دوال أساسية محددة و يمكن توضيحها بالخاصية التعاقبية لقانون قاعدة السلسلة عند أخذنا لمشاهدات عشوائية لغاية الزمن t ، وبالاعتماد على النماذج الحركية الخطية ، يمكن أن نعبر عنها كالاتي :

$$p(\theta_{t-h} \setminus D_t, \sigma^2) \alpha \; p(y_t \setminus \theta_{t-h}, \sigma^2) p(y_{t-1} \setminus \theta_{t-h}, \sigma^2) \ldots p(y_{t-h+1} \setminus \theta_{t-h}, \sigma^2) p(\theta_{t-h} \setminus D_{t-h}, \sigma^2) \quad (1)$$

حيث أن :

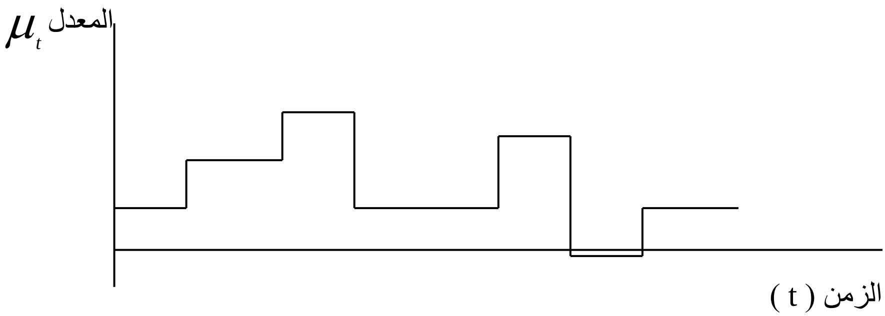
h : عدد صحيح موجب (h>0) ، وان $D_t = \{y_t, y_{t-1}, ..., y_1\}$ تمثل المشاهدات منذ أول مشاهدة .وان α علامة التناسب و σ^2 التباين.

ومن خلال العلاقة (1) يتحقق حساب التمهيد العكسي على التوالي من أول مشاهدة مأخوذة عند 1 = t حتى أخر مشاهدة بشكلها المتعاقب حسب قيمة h وباستخدام التحليل المتسلسل في اخذ

المشاهدات في كل مرحلة نبدى بها في عملية التقدير ، أما الترشيح فانه عملية مستقرة وتعاد بعد اخذ كل مشاهدة في عملية التحليل المتسلسل أو بعد كل عينة تعاد العملية الحسابية الخاصة بالتقدير .

2 نموذج التدرج : Step Model

قبل الدخول في تفصيل تمهيد بيز لنموذج التدرج ، نتناول نموذج التدرج وتعريفه باعتباره احد النماذج الحركية الخطية ، يستخدم هذا النموذج في الحالات التي يكون فيها مستوى العملية مستقر لفترة قصيرة ألأمد ثم يتغير إلى مستوى أ خر ، ويدعى هذا التغير بالقفز (Jump) ثم يرجع إلى الاستقرار .. وهكذا .
يدعى النموذج بنموذج التدرج لان سلسلة التحولات من مستوى إلى أخر تكون بشكل درج انظر الشكل(1) أدناه:



شكل(1): يوضح معادلة النظام لنموذج التدرج

لنموذج التدرج تطبيقات في مجالات شتى كالتنبؤ و السيطرة النوعية ويمكن التعبير عن هذا النموذج كالاتي :

معادلة المشاهدة $y_t = \mu_t + \varepsilon_t \qquad , \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ (2)

معادلة النظام $\mu_t = \mu_{t-1} + \delta_{\mu t} \qquad , \delta_{\mu t} \sim N(0, \sigma^2 r)$ (3)

حيث أن ($\delta_{\mu t}, \varepsilon_t$) مستقلان عن بعضهما ، وأن μ_t يطلق عليها غالبا (مستوى العملية) عند الزمن t و r ثابت.

ويلاحظ في النموذج أن كل من μ_t, y_t أحادي البعد (One Dimensional) .

3 تمهيد بيز لنموذج التدرج : Bayesian smoothing of step model

يمكن التعبير عن النموذج عند الزمن (t-h+1) كما يلي :

$$y_{t-h+1} = \mu_{t-h+1} + \varepsilon_{t-h+1} \qquad , \varepsilon_{t-h+1} \sim N(0, \sigma^2) \qquad (4)$$

$$\mu_{t-h+1} = \mu_{t-h} + \delta_{\mu t-h+1} \qquad , \delta_{\mu t-h+1} \sim N(0, \sigma^2 r) \qquad (5)$$

حيث أن :

r : تمثل معامل القياس وهذا ثابت نفرض له قيمة معلومة .

h : تمثل دليل التمهيد إذا أن : (h=1,2,3,…,t-1) .

للحصول على تمهيد بيز بالنسبة إلى المعلمة μ_{t-h} عند الزمن (t-h) ، يمكننا أولا إيجاد التوزيع اللاحق (posterior Distribution) للمعلمة μ_t التي تمثل مرشح كالمن بحسب نظرية بيز و تحليله المتسلسل عند توافر المعلومات D_t وكما يلي :

من خلال المعادلتين (2) ، (3) و الوصف الإحصائي السابق لبعض مكونات النموذج ، و المعلومات المؤشرة حوله ، يمكن تكوين مرشح كالمن له كما يلي :

الإجراء التكراري للمرشح يبدأ عند الزمن صفر(زمن ما قبل أخذ المشاهدة الأولى) وعنده تكمن المعلومات الأولية المتوافرة قبل بدء الترشيح ، هنا سوف نعبر عن معلوماتنا الأولية وصفيا كالاتي :

$$\mu_0 \sim N(m_0, c_0) \qquad (6)$$

وتقرءا معلوماتنا الأولية μ_0 تخضع لتوزيع طبيعي بتوقع أولي m_0 وتباين أولي C_0 .

وعند الزمن (t-1) يكون التوزيع اللاحق للمعلمة μ_{t-1} توزيعا طبيعيا أيضا ويعبر عنة وصفيا كالاتي :

$$(\mu_{t-1} \backslash D_{t-1}) \sim N(m_{t-1}, c_{t-1}) \qquad (7)$$

ويمثل توزيعا أوليا (prior Distribution) للمعلمة μ_t عند الزمن t ، حيث أن D_{t-1} يمثل المعلومات المتوافرة لغاية الزمن t-1 وهي :

$$D_{t-1} = \{y^{t-1}, \sigma^2, \sigma^2 r\} = \{y_1, y_2, ..., y_{t-1}, \sigma^2, \sigma^2 r\}$$

هدفنا ألان هو إيجاد التوزيع اللاحق للمعلمة μ_t عند الزمن الذي يعين عن طريق معرفتنا بأنة يضم جميع البيانات المتوافرة بوجود المعلومات D_t حيث أن : $D_t = \{D_{t-1}, y_t\}$

باستخدام نظرية بيز وأسلوب التحليل المتسلسل نحصل على الصيغة للتوزيع الاحتمالي اللاحق للمعلمة μ_t عند الزمن t كالاتي :

$$P(\mu_t \backslash D_t)\alpha P(y_t \backslash \mu_t).P(\mu_t \backslash D_{t-1}) \qquad (8)$$

نقوم ألان بإيجاد كل من دالة الترجيح $P(y_t \backslash \mu_t)$ و الاحتمال الأولي قبل المشاهدة y_t وهو $P(\mu_t \backslash D_{t-1})$، وذلك باستخدام المعادلتين (2) ، (3) و التوزيع الاحتمالي (7) .

ولنبدأ بإيجاد دالة الترجيح كالأتي :

من المعادلة (2)

$$E(y_t \backslash \mu_t) = E(\mu_t + \varepsilon_t \backslash \mu_t)$$
$$= E(\mu_t \backslash \mu_t) + E(\varepsilon_t \backslash \mu_t)$$
$$= \mu_t + 0$$
$$= \mu_t$$
$$\text{var}(y_t \backslash \mu_t) = \text{var}(\mu_t + \varepsilon_t \backslash \mu_t)$$
$$= \text{var}(\mu_t \backslash \mu_t) + \text{var}(\varepsilon_t \backslash \mu_t)$$
$$= 0 + \sigma^2$$

ووصفيا نعبر عن دالة الترجيح كالأتي :

$$(y_t \backslash \mu_t) \sim N(\mu_t, \sigma^2)$$

أما التوزيع الأولي للمعلمة μ_t عند الزمن t (قبل المشاهدة y_t) نحصل عليه من المعادلة (3) و التوزيع الاحتمالي (7) كالأتي :

$$E(\mu_t \backslash D_{t-1}) = E(\mu_{t-1} + \delta_{\mu t} \backslash D_{t-1})$$
$$= E(\mu_{t-1} \backslash D_{t-1}) + E(\delta_{\mu t} \backslash D_{t-1})$$
$$= m_{t-1}$$

$$\text{var}(\mu_t \backslash D_{t-1}) = \text{var}(\mu_{t-1} + \delta_{\mu t} \backslash D_{t-1})$$
$$= \text{var}(\mu_{t-1} \backslash D_{t-1}) + \text{var}(\delta_{\mu t} \backslash D_{t-1})$$
$$= C_{t-1} + \sigma^2 r$$
$$= r_t$$

وذلك بوضع: $r_t = C_{t-1} + \sigma^2 r$

وصفيا نعبر عن الاحتمال الأولي $P(\mu_t \backslash D_{t-1})$ كالاتي :

$$(\mu_t \backslash D_{t-1}) \sim N(m_{t-1}, r_t)$$

بالتعويض في المعادلة (8) عن $P(\mu_t \backslash D_{t-1}), P(y_t \backslash \mu_t)$ نحصل على التوزيع الاحتمالي اللاحق للمعلمة μ_t عند الزمن t كالاتي :

$$P(\mu_t \backslash D_t) \alpha Exp\left\{\frac{-1}{2}\left[\frac{1}{\sigma^2}(y_t-\mu_t)^2+\frac{1}{r_t}(\mu_t-m_{t-1})^2\right]\right\}$$

بوضع:

$$I=\frac{1}{\sigma^2}(y_t-\mu_t)^2+\frac{1}{r_t}(\mu_t-m_{t-1})^2$$

نجد أن :

$$I=\frac{1}{\sigma^2}(y_t^2-2y_t\mu_t+\mu_t^2)+\frac{1}{r_t}(\mu_t^2-2\mu_t m_{t-1}+m_{t-1}^2)$$

$$+\frac{1}{r_t}\mu_t^2+\frac{1}{r_t}m_{t-1}^2-2.\frac{1}{r_t}\mu_t m_{t-1}$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}y_t^2+\frac{1}{\sigma^2}\mu_t^2-2.\frac{1}{\sigma^2}y_t\mu_t$$

$$+(\frac{1}{\sigma^2}y_t^2+\frac{1}{r_t}m_{t-1}^2).=(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{r_t})\mu_t^2-2\mu_t(\frac{1}{\sigma^2}y_t+\frac{1}{r_t}m_{t-1})$$

$$=\left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{r_t}\right)\left[\mu_t^2-2\mu_t\left(\frac{\frac{1}{\sigma^2}y_t+\frac{1}{r_t}m_{t-1}}{\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{r_t}}\right)+\left(\frac{\frac{1}{\sigma^2}y_t^2+\frac{1}{r_t}m_{t-1}^2}{\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{r_t}}\right).\frac{\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{r_t}}{\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{r_t}}\right]$$

$$=\left(\tfrac{1}{\sigma^2}+\tfrac{1}{r_t}\right)\left[\mu_t^2-2\mu_t\left(\frac{\frac{1}{\sigma^2}y_t+\frac{1}{r_t}m_{t-1}}{\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{r_t}}\right)+\left(\frac{\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^2y_t^2+\frac{2}{\sigma^2 r_t}y_t m_{t-1}+\left(\frac{1}{r_t}\right)^2m_{t-1}}{\left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{r_t}\right)^2}\right)\right]$$

$$-\frac{1}{\sigma^2 r_t\left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{r_t}\right)}\left(y_t^2-2y_t m_{t-1}+m_{t-1}^2\right)$$

$$=\left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{r_t}\right)\left\{\mu_t^2-2\mu_t\left(\frac{\frac{1}{\sigma^2}y_t+\frac{1}{r_t}m_{t-1}}{\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{r_t}}\right)+\left(\frac{\frac{1}{\sigma^2}y_t+\frac{1}{r_t}m_{t-1}}{\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{r_t}}\right)^2\right\}+\frac{1}{\sigma^2+r_t}\left(y_t-m_{t-1}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{r_t}\right)\left\{\mu_t^2-2\mu_t m_t+m_t^2\right\}+\frac{1}{\sigma^2+r_t}\left(y_t-m_{t-1}\right)^2$$

$$=\left(\tfrac{1}{\sigma^2}+\tfrac{1}{r_t}\right)\left(\mu_t-m_t\right)^2+\tfrac{1}{\sigma^2+r_t}\left(y_t-m_{t-1}\right)^2$$

وذلك بوضع:

$$m_t=\frac{\frac{1}{\sigma^2}y_t+\frac{1}{r_t}m_{t-1}}{\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{r_t}}$$

وعليه فان :

$$P\left(\mu_t \backslash D_t\right)\alpha Exp\left\{\tfrac{-1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{r_t}\right)\left(\mu_t-m_t\right)^2\right\}$$

حيث أن الحد $Exp\left[\frac{-1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2+r_t}\right)\left(y_t-m_{t-1}\right)^2\right]$ ثابت.

أي أن $P(\mu_t \setminus D_t)$ يمثل توزيعا احتماليا طبيعيا ذو وسط m_t وتباين

$$C_t = \frac{\sigma^2 r_t}{\sigma^2 + r_t} = \sigma^2 a_t$$

وذلك بوضع :

$$a_t = \frac{r_t}{\sigma^2 + r_t}$$

كما يمكن التعبير عن m_t بالشكل الأتي :

$$m_t = \frac{r_t y_t + \sigma^2 m_{t-1}}{\sigma^2 + r_t}$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + r_t} m_{t-1} + \frac{r_t}{\sigma^2 + r_t} y_t$$

$$= (1 - a_t) m_{t-1} + a_t y_t$$

$$= m_{t-1} - a_t m_{t-1} + a_t y_t$$

$$= m_{t-1} + a_t (y_t - m_{t-1})$$

$$= m_{t-1} + K_t (y_t - m_{t-1}) \qquad (9)$$

وذلك بوضع :

$$K_t = a_t$$

$$K_t = \frac{r_t}{\sigma^2 + r_t} \qquad (10)$$

ونعبر رياضيا عن التوزيع الاحتمالي اللاحق للمعلمة μ_t عند الزمن t كالتالي :

$$(\mu_t \setminus D_t) \sim N(m_t, \sigma^2 a_t) \qquad (11)$$

المعادلة (9) تدعى بترشيح كالمن و K_t في المعادلة (10) تدعى بمعامل كالمن أو ربحية الترشيح (filter gain) . ومن العلاقة (11) التي تمثل مرشح كالمن لهذا النموذج الذي سيصبح توزيعا أساسيا للتمهيد , لهذا الغرض نعبر عنه حسب تسلسل قيمة h كما يلي :

$$(\mu_{t-h} \setminus D_{t-h}, \sigma^2) \sim N(m_{t-h}, \sigma^2 a_{t-h}) \qquad (12)$$

حيث أن a_{t-1} ، m_{t-h} ذوات بعد واحد عند الزمن t-h .
بعد إيجاد الاحتمال اللاحق في المعادلة (12) نسعى إلى الحصول على دالة الترجيح $P\left(y_{t-h+1} \setminus \mu_{t-h}, \sigma^2\right)$ ، التي تتسلسل مع تغير قيمة h لتكتمل عمليتنا في إيجاد التوزيع التمهيدي وذلك من خلال إدخال التوقع و التباين على $\left(y_{t-h+1} \setminus \mu_{t-h}, \sigma^2\right)$ ووفق نموذج التدرج لمعادلة المشاهدة (4) وكالتالي:

$$\begin{aligned}
&E\left(y_{t-h+1} \setminus \mu_{t-h}, \sigma^2\right) = E\left(\mu_{t-h+1} + \varepsilon_{t-h+1} \setminus \mu_{t-h}, \sigma^2\right) \\
&= E\left(\mu_{t-h+1} \setminus \mu_{t-h}, \sigma^2\right) + E\left(\varepsilon_{t-h+1} \setminus \mu_{t-h}, \sigma^2\right) \\
&= E\left(\mu_{t-h+1} \setminus \mu_{t-h}, \sigma^2\right)
\end{aligned}$$

وعند تعويض قيمة h حيث $\left(h = 1,2,\dots,t-1\right)$ بشكل متعاقب في معادلة النظام رقم(3) نحصل على :

$$\begin{aligned}
E\left(y_{t-h+1} \setminus \mu_{t-h}, \sigma^2\right) &= E\left(\mu_{t-h+1} \setminus \mu_{t-h}, \sigma^2\right) \\
= E\left(\mu_{t-h} \setminus \mu_{t-h}, \sigma^2\right) &+ \sum_{jzl}^{h} E\left(\delta_{\mu_{t-h+j}} \setminus \mu_{t-h}, \sigma^2\right) \\
&= \mu_{t-h} \qquad (13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}\left(y_{t-h+1} \setminus \mu_{t-h}, \sigma^2\right) &= \operatorname{var}\left(\mu_{t-h+1} + \varepsilon_{t-h+1} \setminus \mu_{t-h}, \sigma^2\right) \\
= \operatorname{var}\left(\mu_{t-h+1} \setminus \mu_{t-h}, \sigma^2\right) &+ \operatorname{var}\left(\varepsilon_{t-h+1} \setminus \mu_{t-h}, \sigma^2\right)
\end{aligned}$$

بالمثل عند التعويض بقيمة h بشكل متعاقب في معادلة النظام(3) نحصل على :

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}\left(y_{t-h+1} \setminus \mu_{t-h}, \sigma^2\right) = \operatorname{var}&\left(\mu_{t-h} \setminus \mu_{t-h}, \sigma^2 + \sum_{j=1}^{h} \operatorname{var}\left(\delta_{\mu_{t-h+j}} \setminus \mu_{t-h}, \sigma^2\right)\right. \\
&+ \operatorname{var}\left(\varepsilon_{t-h+1} \setminus \mu_{t-h}, \sigma^2\right)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{h} \mathrm{var}\left(\delta_{\mu_{t-h+1}} \backslash \mu_{t-h}, \sigma^2\right) + \mathrm{var}\left(\varepsilon_{t-h+1} \backslash \mu_{t-h}, \sigma^2\right)$$

$$= \sigma^2 r + \sigma^2 r + \ldots + \sigma^2 r + \sigma^2$$

$$= \sigma^2 (r + r + \ldots + r + 1)$$

$$= \sigma^2 (hr + 1)$$

$$= \sigma^2 d(h) \qquad (14)$$

وذلك بوضع :

$$d(h) = r + r + \ldots + r + 1$$

$$= hr + 1$$

وبالتالي من المعادلتين (13)و(14) نستنتج أن:

$$\left(y_{t-h+1} \backslash \mu_{t-h}, \sigma^2\right) \sim N\left(\mu_{t-h}, \sigma^2 d(h)\right) \qquad (15)$$

وبالتعويض عن كل من المعادلة (12) ،(15) في المعادلة (1) نحصل على التوزيع التمهيدي $P\left(\mu_{t-h} \backslash D_t, \sigma^2\right)$ بالنسبة إلى المعلمة μ_{t-h} ومن خلالها نحصل على مقدر تمهيد بيز التالي :

$$P\left(\mu_{t-h} \backslash D_t, \sigma^2\right) \alpha Exp\left\{\frac{-1}{2\sigma^2}\left[\sum_{j=1}^{h} \frac{1}{d(j)}\left(y_{t-j+1} - \mu_{t-h}\right)^2 + \frac{1}{a_{t-h}}\left(\mu_{t-h} - m_{t-h}\right)^2\right]\right\}$$

وعند إتباع نفس الأسلوب الرياضي الذي قمنا به من اجل التوصل إلى المعادلة التي تمثل مرشح كالمن ، فأننا نحصل على توزيع الاحتمال التمهيدي أعلاه بالصورة :

$$P\left(\mu_{t-h} \backslash D_t, \sigma^2\right) \alpha Exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{1}{d(h)} + \frac{1}{a_{t-h}}\right)\left(\mu_{t-h} - m_t(-h)\right)^2\right\} \qquad (16)$$

حيث أن :

$$\mathrm{var}\left(\mu_{t-h} \backslash D_t, \sigma^2\right) = \sigma^2 . \left(\frac{1}{d(h)} + \frac{1}{a_{t-h}}\right)^{-1}$$

$$= \sigma^2 a_t(-h) \qquad (17)$$

وذلك بوضع :

$$a_t(-h) = \left(\frac{1}{d(h)} + \frac{1}{a_{t-h}}\right)^{-1}$$

وكذلك :

$$m_t(-h) = m_{t-h} + a_t(-h)\sum_{j=1}^{h} d^{-1}(j)\left(y_{t-j+1} - m_{t-h}\right) \qquad (18)$$

ومن المعادلات (14) ، (15) ، (16) نتوصل إلى التوزيع التمهيدي $P\left(\mu_{t-h} \setminus D_t, \sigma^2\right)$ لنموذج التدرج . و الذي يمكن أن نعبر عنه وصفيا كالتالي :

$$\left(\mu_{t-h} \setminus D_t, \sigma^2\right) \sim N\left(m_t(-h), \sigma^2 a_t(-h)\right)$$

يطلق على المعادلة (18) بمقدر تمهيد بيز (Bayesian Smoothing Estimate) بالنسبة إلى المعلمة μ_{t-h} عند الزمن t-h ، و التي من خلالها ستتم عملية التحسين و التعديل بإعادة النظر في عملية التقدير، وهذا ما يتبين عند مقارنتها مع مرشح كالمن الذي تمت دراسته سابقا وفق المشاهدات المتوافرة لدينا . ويمكننا إجراء تطبيق عملي بأخذ بيانات حقيقية و استخدام نموذج التدرج الموضحة صيغته في المعادلتين (2) ، (3) . و الهدف الأساسي يكمن في معالجة البيانات المرشحة أو التي يتم تقديرها بواسطة مقدر مرشح كالمن لتخليصها من التشويش الذي قد تحتويه فيها نتيجة أسباب عدة في عمليه القياس او يكون متبقيا فيها بشكل واضح . و الترشيح الذي سيجرى على بيانات حقيقية عن طريق مقدر مرشح كالمن يمثل الخطوة الأولى في المعالجة معتمدين للحصول عليه على برنامج حاسوبي يعد لهذا الغرض ، حيث يتم تقليلها بنسبة من التشويش الذي تحتويه لنبدأ عمليتنا بتقدير تمهيد بيز للبيانات المرشحة من خلال إعادة النظر بعملية التقدير ليتم التدقيق و التعديل على البيانات المقدرة سابقا (البيانات المرشحة) لتقليل ما تبقى من تشويش في عملية الترشيح لتكون البيانات المعالجة أكثر دقه. ويمكن توضيح ذلك بأشكال بيانية تمثل المقارنة بين التمهيد و الترشيح (m_t ، $m_t(-h)$) وكذا المقارنة بين التمهيد و البيانات المشوشة التي تعتبر عملية التمهيد بمثابة الترشيح العكسي في ضوء البيانات الحديثة ويمكن ملاحظه التعديل أو المعالجة بدقة بأخذ مقطع من الشكل العام الذي يظهر المعالجة بين عمليتي تمهيد بيز ومرشح كالمن عند المقارنة ، فضلا عن البيانات المشوشة التي تمثل البيانات الحقيقيه قبل أي معالجة .

4 الاستنتاجات:

نستنتج أن عملية التمهيد هي العملية العكسية للترشيح و التي تجري على البيانات مرتين أو مرحلتين متعاقبتين لتوصلنا إلى تقدير أدق وذلك بالاعتماد على مشاهدات أو بيانات جديدة أي قراءة جديدة تساعدنا على عملية المعالجة لكي تخلصنا من الأخطاء التي تظهر فيها نتيجة أسباب عدة لنحصل على قراءة أكثر دقة عما هو عليه مسبقا .

ونوصي بعمل برنامج حاسوبي تتم من خلاله المعالجات الموضحة في هذا البحث وإبرازها بأشكال بيانية وذلك حال توافر بيانات حقيقية .

5 المصادر References

1 – Gamerman , D . and Migon , H . S , (1993) , " Dynamic Hierarchical models " , JRSSB ,Vol.. (55) , No . (3) , pp . 629 – 642 .

2 – Harrison , P . J . and Stevens , S . T . (1971 , ((Bayesian approach short – term forecasting)) , operation Reseat Quarterly ,Vol. (22)) , No. (2) , pp . 341 – 362 .

3 – Harrison , P . J . and Stevens , S . T . , (1976) , " Bayesian forecasting with Discussing " ,JRSSB. Vol. (38) , No . (48) , pp . 205 – 246 .

4 – Harrison , P . J . and west , M . , (1997) , " Bayesian forecasting and Dynamic models" Springer _ Verlag , New York .Inc. 2^{nd} .

5 – Kalman , R.s. , (1960) , " A New Approach to linear filtering and prediction problems " , Trans . J . and Basic . Eng . series D. , Vol. . (82) , pp. 35 – 45 .

6 – Talib s . Jalil , (1999) , " Bayesian smoothing with Simulation " , Dirasat Natural and Eng . Sciences ,Vol. (24) ,, No . (1) , pp. 73 – 87 .

7 – West , M. , (1995) , " Bayesian Inference in Cyclical component Dynamic linear Models " , J. of the American Statist . Association December , Vol.(40) , No . (432) , pp. 1301 - 1312

Bayesian Smoothing of Dynamic linear model – Step model

Sultan Ali Mohamed Salem

Department of Mathematics, Faculty of Education, Hodeida University, Hodeida, Yemen

Abstract:

Smoothing is a kind of estimation of a parameter or a state variable. It is also called data smoothing. In this paper, the Bayesian smoothing for the dynamic linear model (step model) has been considered. The use of Bayesian smoothing means the reconsideration of new data for better enhancement and error reduction. Implementing any new data in the estimation process is a type of backward filtering to get a more precise estimation of the model parameters (state variable). In this paper, the mathematical content is highlighted to obtain a practical application as soon as real data are provided.